ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ, 21/6/2017, διδάσκων Α. Τόλιας

Θέμα 1.

Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε το μ να είναι σ-πεπερασμένο αλλά όχι πεπερασμένο.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει μια ακολουθία $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ξένων ανα δύο συνόλων της $\mathcal{A}$ με $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ και $0 < \mu(B_m) < +\infty$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

β) Αν $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ όπως παραπάνω, και ορίσουμε $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ με τύπο $\nu(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(A\cap B_m)}{2^m \cdot \mu(B_m)}$ να δείξετε ότι το ν είναι πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ και ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $\mu(A) = 0$ αν και μόνο αν $\nu(A) = 0$.

Θέμα 2.

α) Να δειχθεί ότι για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ ισχύει $\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(U) : U \text{ ανοικτό}, A \subset U\}$.
β) Να δώσετε τον ορισμό του κανονικού μέτρου. Στη συνέχεια να δείξετε ότι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$ είναι κανονικό και ότι ισχύει $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subset A\}$. για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$.

Θέμα 3.

α) Έστω X, Y σύνολα, $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Να δειχθεί ότι η οικογένεια $\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο ~~X~~ Y
β) Έστω $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ δυο μετρήσιμοι χώροι, $f : X \to Y$ μια συνάρτηση και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Y ώστε $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$. Να δείξετε ότι αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{F}$ τότε $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$.
γ) Δίνονται δυο μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ) και μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$. Να δειχθεί ότι αν το B είναι Borel υποσύνολο Y τότε το $f^{-1}(B)$ είναι Borel υποσύνολο του X. [Υπόδειξη: Εφαρμόστε το β) ερώτημα.]

Θέμα 4.

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.
α) Να δώσετε τον ορισμό του ολοκληρώματος Lebesgue.
(i) Για θετικές απλές συναρτήσεις. (ii) Για μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to [0, +\infty]$. (iii) Για μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$.

β) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης του Lebesgue (χωρίς να το αποδείξετε) και στη συνέχεια να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Λήμμα του Fatou.

Θέμα 5.

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f : X \to [0 + \infty)$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Να δειχθεί ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mu([n \leq f]) < +\infty$

[Υπόδειξη: Θεωρώντας τα σύνολα $B_n = [n \leq f]$ και $A_n = [n \leq f < n+1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορείτε να δείξετε αρχικά ότι

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mu(A_n)$.

β) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mu(A_n) \leq \int f d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot \mu(A_n)$.]

Θέμα 6.

Να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{-2x} dx.$$

[Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue. (Να θεωρηθεί γνωστό ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ακολουθία με γενικό όρο $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα).]